

【1】 以下の各問いに答えよ.

(1) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$ を超えない最大の整数 n を求めよ.

さらに, $\frac{4}{3-\sqrt{5}} - n = a$ とするとき, $\sqrt{2(1-a)}$ を, 二重根号を用いずに表せ.

(2) 2 次関数 $y = x^2 - 2x + 5$ のグラフを, x 軸方向に 2, y 軸方向に k だけ平行移動したところ, $y = x^2 - 6x + 7$ のグラフに重なった. このとき, k の値を求めよ.

(3) 1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれたカードが 9 枚ある. これらを 3 枚ずつに分ける方法は全部で何通りあるか求めよ.

(4) xy 平面上の点 $(3, -2)$ から直線 $y = \frac{1}{2}x - 1$ へ引いた垂線の長さを求めよ.

(5) $0 \leq x < 2\pi$ のとき, 方程式 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ を解け.

(6) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき, 6^{20} は何桁の整数か求めよ.

(7) $a_n = 22 \cdots \cdots 2$ (2 が n 個並んだ自然数) で定められる数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とするとき, $\{b_n\}$ の初項から第 6 項までの和を求めよ.
また, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n = p(q^n - 1)$ と表すとき, p と q の値を求めよ.

【2】 平面上のベクトル $\vec{a} = (3\sqrt{3}, 3)$, $\vec{b} = (-5\sqrt{3}, 5)$ について, 以下の各問に答えよ.

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.

(2) $|\vec{c}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 6$ を満たすベクトル $\vec{c}$ に対して, $|\vec{a} - \vec{c}|$ を求めよ.

(3) $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ によって定められる三角形 PAB において, $\angle APB$ の二等分線と辺 AB との交点を Q とする. このとき, $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の式で表せ.

(4) (3) の三角形 PAB で, 点 P から辺 AB へ引いた垂線と AB との交点を H とする. このとき, $AH : BH$ を最も簡単な整数の比で表せ.

【3】 連続な関数 $f(x)$ を用いて $g(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^1 xf(t) dt + (x-2)^2$ と表される関数 $g(x)$ について、以下の各問いに答えよ.

(1) $g(0)$ を求めよ.

(2) $g(1)=0$ のとき, $\int_0^1 f(t) dt$ を求めよ.

(3) $f(x)=e^x$ のとき, $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ.

(4) すべての実数 x に対して, $g(x)$ が一定の値であるとき, $f(x)$ を求めよ.