

2022 年度 豊田工業大学
学部 推薦選抜（公募型）筆記試験問題

数 学

（注 意 事 項）

- (1) 試験開始の合図があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
- (2) 試験開始後、受験番号と氏名を解答用紙の所定欄に記入してください。
記入がない場合、0 点になることがあります。
- (3) 解答はすべて解答用紙の所定欄に記入してください。
- (4) 試験時間は 70 分です。
- (5) 試験終了時刻まで退場することはできません。
- (6) 問題用紙は試験終了後に回収します。

【1】 次の問いに答えよ.

(1) 正の数 a が $a - \frac{1}{a} = 1$ を満たすとき, 次の式の値を求めよ.

(i) $a^2 + \frac{1}{a^2}$

(ii) $a + \frac{1}{a}$

(2) 放物線 C は x 軸と点 $(-2, 0)$ で接し, y 切片が 6 である. C を x 軸方向に 3 , y 軸方向に $-\frac{1}{2}$ だけ平行移動した放物線を C' とするとき, C と C' を表す 2 次関数の式をそれぞれ $y = ax^2 + bx + c$ の形で求めよ.

(3) $AB = 6$, $BC = 5$, $CA = 4$ である $\triangle ABC$ について, $\cos B$ の値を求めよ.
また, $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

(4) $\triangle ABC$ の辺 AB を $2:3$ に内分する点を D , 辺 AC の中点を E とする. 線分 BE と線分 CD の交点を P とするとき, $BP:PE$ を最も簡単な整数の比で表せ.

(5) 不等式 $\log_{\sqrt{3}}(x-4) \leq \log_3(x+2)$ について, 真数条件を満たす x の値の範囲を求めよ. また, 不等式の解を求めよ.

(6) $z^3 = -1$ を満たす 3 つの異なる複素数 z のうち, -1 と異なるものを α , β とする. このとき, $\alpha + \beta$ と $\alpha^5 + \beta^5$ の値を求めよ.

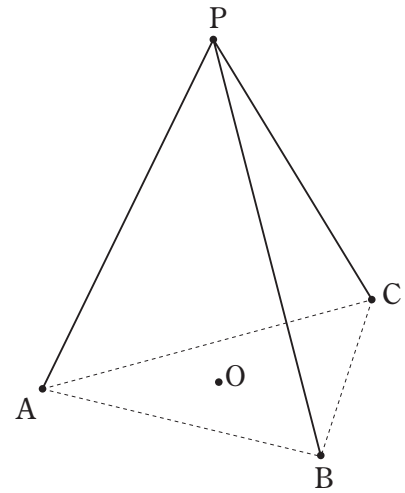
【2】 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = 2a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 を求めよ.
- (2) S_{n+1} を S_n の式で表せ. ただし, S_n 以外に n は用いないこと.
また, 数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) a_{n+1} を a_n の式で表せ. ただし, a_n 以外に n は用いないこと.
また, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

【3】 右図は、カメラなどを固定するための三脚を模式的に表したものである。3本の脚 PA , PB , PC は等しい長さで、点 P において自由に動くようになっている。したがって、3点 A , B , C を頂点とする三角形は正三角形とは限らない。いま、 $\triangle ABC$ の外接円の半径が 1 で、外心を O とするとき、 $4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ が成り立っている。このとき、次の問いに答えよ。



図

- (1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ の値を求めよ。
- (2) 辺 BC の長さを求めよ。
- (3) 平面上で異なる 3 点を通る円が存在するように、空間においては異なる 4 点を通る球面が必ず存在する。 $PA = PB = PC = 2$ のとき、4 点 P , A , B , C を通る球面の半径を求めよ。

【4】 次の問いに答えよ.

- (1) 三角関数 $f(x) = \sin x$ を微分すると $f'(x) = \cos x$ となることを, 導関数の定義から示せ.

ただし, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ が成り立つことを用いてよい.

- (2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で, 2 曲線 $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ によって囲まれる図形の面積の和を求めよ.

- (3) $\sin g(x) = x \left(0 < g(x) < \frac{\pi}{2} \right)$ が成り立つとき, $g(x)$ の導関数を三角関数を使わない式で表せ.